

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Ιούνιος 2012

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2 μονάδες το καθένα). Καλή Επιτυχία.

Θέμα 1 α) Αν $P, Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι ορθογώνιοι πίνακες, να αποδείξετε ότι και το γινόμενο PQ είναι ορθογώνιος.

β) Αν $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι ορθογώνιος και $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι οποιοσδήποτε πίνακας, να αποδείξετε ότι:

$$\|QA\|_2 = \|AQ\|_2 = \|A\|_2.$$

Θέμα 2 Δίνεται το γραμμικό σύστημα: $Ax = b$ με $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ και $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η μέθοδος Gauss-Seidel, να βρεθούν περιοχές σύγκλισης της παραμέτρου ω για τη μέθοδο παρεκβολής (extrapolated) της Gauss-Seidel και να βρεθεί η βέλτιστη τιμή αυτής.

Θέμα 3 : α) Να αποδείξετε ότι δυο διαδοχικά διανύσματα υπόλοιπου $r^{(k)}$ και $r^{(k+1)}$ της μεθόδου απότομης καθόδου, είναι ορθογώνια.

β) Δίνεται το γραμμικό σύστημα: $Ax = b$ με $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ και $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Να λυθεί

με τον αλγόριθμο της μεθόδου συζυγών κλίσεων. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις διατηρώντας κλάσματα στους υπολογισμούς.)

Θέμα 4 : Να λυθεί το γραμμικό πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων $\min_x \|b - Ax\|_2$ με $A =$

$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ και $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$, με την QR ανάλυση χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Gram-

Schmidt ορθογωνοποίησης. Στη συνέχεια, να βρεθεί η τιμή $\min_x \|b - Ax\|_2$. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις με ριζικά και κλάσματα στους υπολογισμούς.)

Θέμα 5 Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Αφού αποδειχτεί ότι ο A είναι θετικά

ορισμένος να προσεγγιστεί με τη μέθοδο των αντίστροφων δυνάμεων η μικρότερη ιδιοτιμή του κάνοντας δυο επαναλήψεις με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = (1 \ 0 \ 0)^T$. Η λύση των συστημάτων να γίνει με τον αλγόριθμο της ανάλυσης Cholesky. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις διατηρώντας κλάσματα στους υπολογισμούς.)